

42. Internationale PhysikOlympiade Bangkok, Thailand 2011



Adresse der Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen

IPN an der Universität Kiel

Olshausenstraße 62

24098 Kiel

Telefon: 0431 / 880-5120

email: sekretariat@ipho.info

**Lösungen und Bewertungsvorschläge
zu den Aufgaben der 2. Runde
des Auswahlverfahrens für die 42. IPhO 2011**

Zu Übungszwecken für interessierte
Schülerinnen und Schüler

Lösung zu Aufgabe 1 Luftballon

- a) Der Druck $p_0 = 1,2 \cdot 10^5$ Pa im Inneren des auf den Radius r_0 aufgeblasenen Ballons setzt sich aus dem äußeren Luftdruck und dem durch die Ballonhülle verursachten Druck zusammen. Es gilt also mit den Hinweisen in der Aufgabenstellung

$$p_0 = p_{\text{Luft}} + \frac{\alpha}{r_0}, \quad (1.1)$$

wobei α eine Proportionalitätskonstante darstellt. Mit den gegebenen Werten lässt sich daraus α bestimmen zu

$$\alpha = r_0 (p_0 - p_{\text{Luft}}). \quad (1.2)$$

Für den Druck p' bei einem Radius von $3/2 r_0$ gilt daher

$$p' = p_{\text{Luft}} + \frac{2\alpha}{3r_0} = \frac{p_{\text{Luft}}}{3} + \frac{2p_0}{3} \approx 1,13 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (1.3)$$

- b) Bezeichne mit $V_0 := \frac{4}{3} \pi r_0^3$ das Volumen des auf den Radius r_0 aufgeblasenen Ballons. Da der Ballon klein sein soll, wird für die Bestimmung der Eintauchtiefe die Position des Mittelpunktes des Ballons betrachtet.

Im Folgenden wird angenommen, dass sich Luft wie ein ideales Gas verhält. Ein Vergleich der Situationen vor dem Eintauchen mit der Situation des auf die gesuchte Tiefe h untergetauchten Ballons ergibt mit Hilfe der Gasgleichung bei konstanter Stoffmenge:

$$\frac{p' \left(\frac{3}{2}\right)^3 V_0}{T_0} = \frac{(p_{\text{Luft}} + \frac{\alpha}{r} + \rho_{\text{Wasser}} g z) \frac{4}{3} \pi r^3}{T_{\text{Wasser}}} \stackrel{z=h}{=} \frac{(p_0 + \rho_{\text{Wasser}} g h) V_0}{T_{\text{Wasser}}}, \quad (1.4)$$

wobei z für die Eintauchtiefe des Ballons und r für den Ballonradius in dieser Tiefe steht. Es wird angenommen, dass die Temperatur der eingeschlossenen Luft nach dem Untertauchen gleich der Wassertemperatur ist. Aus (1.4) ergibt sich die Tiefe h zu

$$h = \frac{1}{\rho_{\text{Wasser}} g} \left\{ p_{\text{Luft}} \frac{9 T_{\text{Wasser}}}{8 T_0} + p_0 \left(\frac{9 T_{\text{Wasser}}}{4 T_0} - 1 \right) \right\} \approx 25 \text{ m}. \quad (1.5)$$

- c) Da die Hülle des Ballons keine Wärme leitet, verläuft der Prozess des Untertauchens adiabatisch. Für die Luft in dem Ballon gilt daher

$$p V^\kappa = \text{const.}, \quad (1.6)$$

wobei $\kappa \approx 7/5$ der Adiabatenexponent von Luft ist. Ein Vergleich der Situationen direkt vor dem Eintauchen und der für den auf die Tiefe h' untergetauchten Ballon ergibt

$$p' \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^3 V_0 \right\}^\kappa = \left(p_{\text{Luft}} + \frac{\alpha}{r} + \rho_{\text{Wasser}} g z \right) \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)^\kappa \stackrel{z=h'}{=} (p_0 + \rho_{\text{Wasser}} g h') V_0^\kappa, \quad (1.7)$$

und damit für die gesuchte Tiefe

$$h' = \frac{1}{\rho_{\text{Wasser}} g} \left\{ \frac{p_{\text{Luft}}}{3} \left[\frac{3}{2} \right]^{3\kappa} + p_0 \left(\left[\frac{3}{2} \right]^{3\kappa-1} - 1 \right) \right\} \approx 51 \text{ m}. \quad (1.8)$$

Die Lufttemperatur T im Ballon nach dem Untertauchen lässt sich mit Hilfe der idealen Gasgleichung bestimmen. Da die Stoffmenge der Luft konstant bleibt, gilt

$$\frac{p' \left(\frac{3}{2}\right)^3 V_0}{T_0} = \frac{(p_0 + \rho_{\text{Wasser}} g h') V_0}{T}. \quad (1.9)$$

Daraus ergibt sich mit (1.3) und (1.8) die Temperatur nach dem Untertauchen zu

$$T = T_0 \frac{8(p_0 + \rho_{\text{Wasser}} g h')}{9(p_{\text{Luft}} + 2p_0)} \approx 488 \text{ K} \approx 215^\circ \text{C}. \quad (1.10)$$

- d) Für das Untertauchen des Ballons muss Arbeit gegen die Auftriebskraft verrichtet werden. Da die Hülle des Ballons sehr dünn ist, kann die Masse der Ballonhülle vernachlässigt werden. Die Masse des eingeschlossenen Luftvolumens ist gegenüber der Masse des verdrängten Wasservolumens ebenfalls vernachlässigbar. Daher ist die Auftriebskraft gegeben durch

$$F_{\text{Auftrieb}} = \frac{4}{3} \pi r(z)^3 \rho_{\text{Wasser}} g, \quad (1.11)$$

wobei $r(z)$ den von der momentanen Eintauchtiefe z abhängigen Radius des Luftballons bezeichnet. Da der Ballonradius klein gegenüber der Tiefe ist, auf die der Ballon gebracht wird, kann die Ausdehnung des Ballons bei der Eintauchtiefe erneut vernachlässigt werden. Die Eintauchtiefe lässt sich mit Gleichung (1.4) bzw. (1.7) in Abhängigkeit von dem Radius des Ballons angeben. Es ergibt sich für die beiden Prozesse

$$z(r) = \frac{1}{\rho_{\text{Wasser}} g} \left\{ \frac{9 T_{\text{Wasser}} (p_{\text{Luft}} + 2p_0)}{8 T_0} \frac{r_0^3}{r^3} - (p_0 - p_{\text{Luft}}) \frac{r_0}{r} - p_{\text{Luft}} \right\} \quad \text{für den Prozess in b)}, \quad (1.12)$$

$$z(r) = \frac{1}{\rho_{\text{Wasser}} g} \left\{ \frac{p_{\text{Luft}} + 2p_0}{3} \left(\frac{3r_0}{2r} \right)^{3\kappa} - (p_0 - p_{\text{Luft}}) \frac{r_0}{r} - p_{\text{Luft}} \right\} \quad \text{für den Prozess in c)}. \quad (1.13)$$

Für den ersten Prozess wurde dabei angenommen, dass die Temperatur der eingeschlossenen Luft während des Untertauchens gleich der Wassertemperatur ist.

Die jeweils zu verrichtende Arbeit W ergibt sich damit durch Integration zu

$$W = \int_0^{h \text{ bzw. } h'} dz F_{\text{Auftrieb}}(r(z)) = \int_{\frac{3}{2}r_0}^{r_0} dr \frac{dz}{dr} F_{\text{Auftrieb}}(r). \quad (1.14)$$

Betrachtet man zunächst den unter b) behandelten Fall der gut wärmeleitfähigen Hülle, so ist zu beachten, dass die Temperatur der in dem Ballon eingeschlossenen Luft schon an der Wasseroberfläche auf die Wassertemperatur absinkt. Daher ist der anfängliche Radius nicht gleich $\frac{3}{2}r_0$ sondern muss aus (1.4) bestimmt werden. Der anfängliche Radius ergibt sich als Lösung einer Gleichung dritten Grades zu etwa $1,47 r_0 =: \kappa r_0$. Es ist damit für die Arbeit

$$\begin{aligned} W_{\text{leitend}} &= \frac{4}{3} \pi \int_{\kappa r_0}^{r_0} dr r^3 \left\{ - \frac{27 T_{\text{Wasser}} (p_{\text{Luft}} + 2p_0)}{8 T_0} \frac{r_0^3}{r^4} + (p_0 - p_{\text{Luft}}) \frac{r_0}{r^2} \right\} \\ &= \frac{4}{3} \pi r_0^3 \left\{ \frac{27}{8} (p_{\text{Luft}} + 2p_0) \frac{T_{\text{Wasser}}}{T_0} \ln \kappa - \frac{1}{2} (\kappa^2 - 1) (p_0 - p_{\text{Luft}}) \right\} \\ &\approx 1,7 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Für den unter c) behandelten Fall der wärmeisolierenden Ballonhülle ergibt sich hingegen

$$\begin{aligned} W_{\text{isolierend}} &= \frac{4}{3} \pi \int_{\frac{3}{2}r_0}^{r_0} dr r^3 \left\{ - (p_{\text{Luft}} + 2p_0) \kappa \left(\frac{3r_0}{2r} \right)^{3\kappa} \frac{1}{r} + (p_0 - p_{\text{Luft}}) \frac{r_0}{r^2} \right\} \\ &= \frac{4}{3} \pi \left[(p_{\text{Luft}} + 2p_0) \frac{\kappa}{3\kappa - 3} \left(\frac{3}{2} \right)^{3\kappa} \frac{r_0^{3\kappa}}{r^{3\kappa-3}} + \frac{p_0 - p_{\text{Luft}}}{2} r_0 r^2 \right]_{\frac{3}{2}r_0}^{r_0} \\ &= \frac{4}{3} \pi r_0^3 \left\{ \frac{27}{8} (p_{\text{Luft}} + 2p_0) \frac{\kappa}{3\kappa - 3} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{3\kappa-3} - 1 \right) - \frac{5}{8} (p_0 - p_{\text{Luft}}) \right\} \\ &\approx 3,5 \text{ kJ}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Lösung zu Aufgabe 2 Kugel und Münze im Trichter

2.1 Punktförmige Masse im Trichter

- a) Bei einer Höhe z bewegt sich die Masse mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{v}{R(z)}. \quad (2.1)$$

Auf die Punktmasse wirken dabei die Gravitationskraft $F_G = m g$, die nach unten wirkt, und eine, aufgrund der Reibungsfreiheit, zur Trichterwand senkrechte Reaktionskraft der Wand F_R . Damit die Masse auf gleicher Höhe bleibt und mit dem Radius $R(z)$ um die z -Achse rotiert, muss der Anteil der Gewichtskraft entlang der Trichterfläche gerade gleich dem entsprechenden Anteil der für die Kreisbewegung notwendigen Zentripetalkraft sein. Es muss also gelten (vgl. auch Abbildung 1)

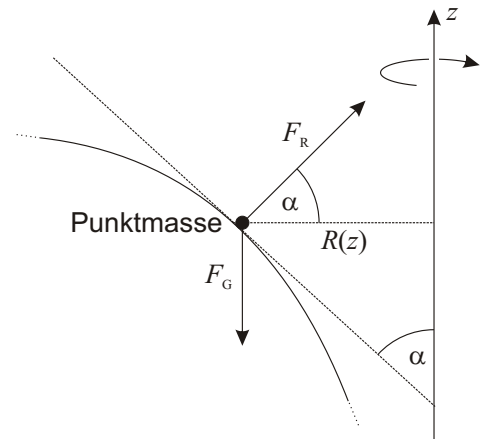


Abbildung 1: Skizze zur Punktmasse im Trichter.

$$F_G \cos \alpha = m g \cos \alpha = m \Omega^2 R(z) \sin \alpha = \frac{m v^2}{R(z)} \sin \alpha. \quad (2.2)$$

Für die Steigung der Funktion $R(z)$ ergibt sich daraus

$$\frac{dR}{dz}(z) = \tan \alpha = \frac{m g}{m v^2 / R(z)}, \quad \text{und damit} \quad \frac{dR}{dz}(z) = \frac{g}{v^2} R(z). \quad (2.3)$$

Für die Funktion $R(z)$ folgt mit den gegebenen Größen aus dieser Differentialgleichung

$$R(z) = R_{\text{unten}} e^{g z / v^2}, \quad (2.4)$$

wobei R_{unten} den Radius am unteren Rand, also bei $z = 0$, bezeichnet.

Für den beschriebenen Trichter mit Radien $R_{\text{unten}} = 5,0 \text{ cm}$ und $R(h) = 50 \text{ cm}$ beträgt die Höhe demnach

$$h = \frac{v^2}{g} \ln \frac{R(h)}{R_{\text{unten}}} \approx 23 \text{ cm}. \quad (2.5)$$

- b) Damit die Masse auf der anfänglichen Höhe bleibt, müssen die wirkenden Kräfte der gleichen Bedingung wie in Aufgabenteil a) genügen. Es muss also Gleichung (2.3) für $z = h$ gelten. Nun ist mit $R(z) = R_{\text{oben}} / \sqrt{\frac{2g}{v^2}(h-z) + 1}$

$$\frac{dR}{dz}(z) = \frac{g}{v^2} \frac{R(z)^3}{R_{\text{oben}}^2} = \frac{g}{v^2} \frac{R(z)^3}{R(h)^2}, \quad \text{und damit} \quad \frac{dR}{dz}(h) = \frac{g}{v^2} R(h). \quad (2.6)$$

Die Bedingung (2.3) ist also erfüllt, so dass die Masse bei einem entsprechend geformten Trichter stets an dessen oberen Rand bleibt.

Bei der Bewegung der Masse bleibt die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie im Schwerfeld der Erde erhalten, da die Reaktionskraft der Wand keine Arbeit an der Masse verrichten kann. Es gilt also

$$\frac{1}{2} m (v(t)^2 + u(t)^2) + m g z = \text{konstant} = \frac{1}{2} m (v_0^2 + u_0^2) + m g h, \quad (2.7)$$

wobei $v(t)$ und $u(t)$ die horizontale und die dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente der Masse zur Zeit t entlang der Trichterwand bezeichnen. Zur Vermeidung von Verwechslungen wurden außerdem die in der Aufgabe mit v und u bezeichneten Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t = 0$ in v_0 bzw. u_0 umbenannt.

Die wirkenden Kräfte liegen immer in der von der z -Achse und dem Radiusvektor aufgespannten Ebene. Die wirkenden Drehmomente bezüglich eines Punktes auf der z -Achse sind daher immer horizontal und die z -Komponente des Drehimpulses bleibt somit erhalten. Damit gilt

$$L_z = m v(t) R(z) = m v_0 R_{\text{oben}}, \quad \text{d.h.} \quad v(t) = v_0 \frac{R_{\text{oben}}}{R(z)}. \quad (2.8)$$

Eingesetzt in den Energiesatz (2.7) führt dies zu

$$u(t)^2 = u_0^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{R_{\text{oben}}^2}{R(z)^2} \right) + 2g(h - z) = u_0^2. \quad (2.9)$$

Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu v_0 bleibt also während der Bewegung konstant.

Damit bewegt sich die Masse entweder direkt aus dem Trichter heraus (wenn u_0 aufwärts gerichtet ist) oder sie bewegt sich in den Trichter hinein, wobei die horizontale Geschwindigkeit mit der Verringerung des Radius gemäß (2.8) zunimmt und die dazu senkrechte Geschwindigkeit entlang der Trichterfläche konstant gleich u_0 ist.

Die Zeit, die die Masse im zweiten Fall bis zum Erreichen des unteren Trichterrandes benötigt, lässt sich mit Hilfe der nebenstehenden Graphik, die den Radius des Trichters in Abhängigkeit von der Höhe für die gegebenen Werte zeigt, abschätzen. Die Länge der abgebildeten Kurve entspricht gerade der Strecke, die in die zur Geschwindigkeit v_0 senkrechte Richtung zurückgelegt werden muss, um den unteren Trichterrand zu erreichen. In diese Richtung bewegt sich die Masse mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 . Die Länge der Kurve lässt sich durch Approximation mit einigen Geradenabschnitten abschätzen zu $\ell \approx 0,8 \text{ cm}$, so dass sich die Zeit bis zum Erreichen des unteren Trichterrandes zu

$$T = \frac{\ell}{u_0} \approx \frac{80 \text{ cm}}{10 \text{ cm s}^{-1}} \approx 8 \text{ s} \quad (2.10)$$

ergibt.

- c) Für eine Bahn mit konstanter z -Koordinate muss das in (2.2) ausgedrückte Kräftegleichgewicht erfüllt sein. Es muss also mit $R(z) = R_{\text{unten}} + cz$ gelten, dass

$$\frac{dR}{dz}(z) = c = \frac{g}{v^2} R(z) = \frac{g}{v^2} (R_{\text{unten}} + cz). \quad (2.11)$$

Diese Gleichung ist bei der Höhe

$$z = \frac{v^2}{g} - \frac{R_{\text{unten}}}{c} = \frac{v^2}{g} - \frac{h R_{\text{unten}}}{R_{\text{oben}} - R_{\text{unten}}} \quad (2.12)$$

erfüllt. Die Geschwindigkeit muss dabei mindestens so groß sein, dass der Ausdruck (2.12) nichtnegativ ist, d.h. es muss

$$v \geq \sqrt{\frac{g R_{\text{unten}}}{c}} = \sqrt{\frac{g h R_{\text{unten}}}{R_{\text{oben}} - R_{\text{unten}}}} \quad (2.13)$$

sein.

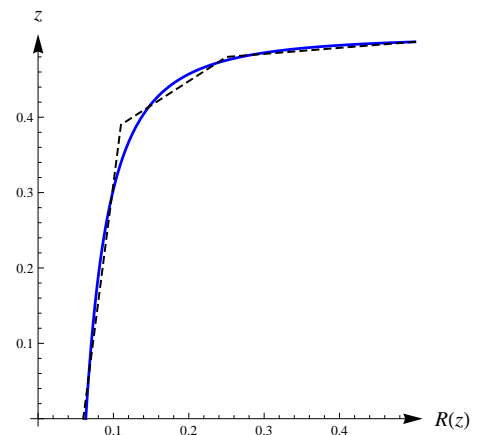


Abbildung 2: Trichterradius als Funktion der Höhe und Approximation durch Geradenabschnitte.

- d) Bezeichne erneut mit $v(t)$ die horizontale bzw. mit $u(t)$ die dazu senkrechte Geschwindigkeitskomponente der Masse zur Zeit t entlang der Trichterwand. Benenne außerdem die in der Aufgabe mit v und u bezeichneten Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t = 0$ in v_0 bzw. u_0 um.

In der folgenden Betrachtung wird vorausgesetzt, dass die zusätzliche Geschwindigkeit u_0 einen Anteil in negative z -Richtung besitzt. Andernfalls würde die Punktmasse den Trichter direkt nach oben verlassen.

Bei einer Verringerung der z -Koordinate und damit einer Verringerung des Radius $R(z)$ vergrößert sich aufgrund der Erhaltung der z -Komponente des Drehimpulses die horizontale Geschwindigkeit $v(t)$ gemäß (2.8).

Der Anteil $mg \cos \alpha$ der Gravitationskraft entlang der Trichteroberfläche kann den entsprechenden Anteil der für die Kreisbewegung notwendigen Zentripetalkraft

$$F_z \sin \alpha = \frac{mv^2}{R(z)} \sin \alpha = \frac{mv_0^2 R_{\text{oben}}^2}{R(z)^3} \tan \alpha \cos \alpha = \frac{cmv_0^2 R_{\text{oben}}^2}{R(z)^3} \cos \alpha \quad (2.14)$$

nicht mehr aufbringen, und die Masse wird in dem Trichter nach oben beschleunigt. Wenn die Geschwindigkeit u_0 klein genug ist, wird die Punktmasse vor Erreichen des unteren Trichterrandes vollständig in ihrer vertikalen Bewegung abgebremst und verlässt den Trichter am oberen Rand. Im Folgenden wird der Bereich von u_0 bestimmt, für den dieser Fall eintritt.

Ausgangspunkt ist erneut der Energiesatz (2.7), der mit

$$\dot{z}(t) = -u(t) \cos \alpha = -u(t) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -u(t) \frac{1}{\sqrt{1 + R'(z)^2}} = -u(t) \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \quad (2.15)$$

für die zeitliche Änderung der Höhe

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \sqrt{u_0^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{R_{\text{oben}}^2}{R(z)^2}\right) + 2g(h - z)} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \sqrt{u_0^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{R_{\text{oben}}^2}{(R_{\text{unten}} + cz)^2}\right) + 2g(h - z)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ergibt. Die Punktmasse bewegt sich in dem Trichter nach unten, solange $\dot{z} < 0$ ist. Keine Höhenänderung findet statt, wenn

$$0 = u_0^2 + v_0^2 \left(1 - \frac{R_{\text{oben}}^2}{(R_{\text{unten}} + cz)^2}\right) + 2g(h - z) \quad (2.17)$$

bzw. wenn

$$u_0 = \sqrt{v_0^2 \left(\frac{R_{\text{oben}}^2}{(R_{\text{unten}} + cz)^2} - 1\right) - 2g(h - z)} \quad (2.18)$$

gilt. Die Masse verlässt den Trichter also nicht an dem unteren Rand, wenn die Punktmasse vor Erreichen des unteren Randes die Bedingung (2.18) erfüllt, also in vertikaler Richtung zum Stehen kommt. Da der Ausdruck (2.18), wie man z.B. durch Betrachtung der Ableitung überprüfen kann, monoton fallend in z ist, entspricht der betragsmäßig größte mögliche Wert für u_0 dem, der sich aus (2.18) für $z = 0$ ergibt. Dieser ist mit $v_0^2 = gh \frac{R_{\text{oben}}}{R_{\text{oben}} - R_{\text{unten}}}$ gegeben durch

$$u_{0, \max} = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{R_{\text{oben}}}{R_{\text{oben}} - R_{\text{unten}}} \left(\frac{R_{\text{oben}}^2}{R_{\text{unten}}^2} - 1\right) - 2} \approx 1,0 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.19)$$

Für alle zusätzlichen Geschwindigkeiten u_0 (bzw. u nach der Bezeichnung in der Aufgabe), die entweder nach oben gerichtet oder nach unten gerichtet und betragsmäßig kleiner bzw. gleich diesem Wert sind, verlässt die Punktmasse den Trichter also nicht an dem unteren Rand sondern tritt an dem oberen Rand aus.

2.2 Münze im Trichter

- e) Die Betrachtung kann ähnlich zu Teil 2.1 durchgeführt werden, allerdings muss nun die endliche Ausdehnung der Münze beachtet werden. Abbildung 3 zeigt die Situation der rollenden Münze und die auf sie wirkenden Kräfte.

Entlang der Trichterfläche und senkrecht zur Rollrichtung der Münze wirkt nun eine zusätzliche Reaktionskraft der Trichterwand, die ein Drehmoment auf die Münze bezüglich ihres Schwerpunktes erzeugt. Dieses Drehmoment führt zu der für den Umlauf im Trichter notwendigen Präzession des Drehimpulses der Münze um die z -Achse. Der Drehimpuls der Münze bezüglich der Symmetrieachse der Münze beträgt

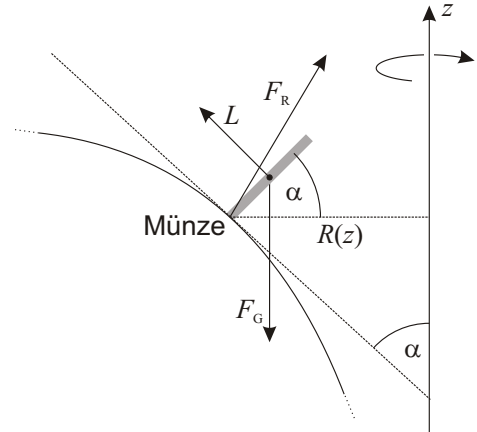


Abbildung 3: Skizze zur rollenden Münze im Trichter.

$$|\vec{L}| = J \omega = \frac{1}{2} m r^2 \omega, \quad (2.20)$$

wobei $\omega = v/r$ die Winkelgeschwindigkeit der Münze für die Drehung um ihre Symmetrieachse bezeichnet. Bei der Präzession des Drehimpulses ändert sich nur dessen zur z -Achse senkrechter Anteil, der mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um diese Achse umläuft. Daher gilt für das Drehmoment:

$$M = J \omega \sin \alpha \Omega. \quad (2.21)$$

Für die entlang der Trichterfläche wirkenden Kräfte ergibt sich das Gleichgewicht

$$m g \cos \alpha = \frac{M}{r} + m \Omega^2 \underbrace{(R(z) - r \cos \alpha)}_{\approx R(z)} \sin \alpha \approx m \left(\frac{1}{2} r \omega \Omega + R(z) \Omega^2 \right) \sin \alpha. \quad (2.22)$$

Daraus folgt mit $\omega = v/r$ und $\Omega = v/R(z)$ analog zu (2.2)

$$\frac{dR(z)}{dz} = \tan \alpha = \frac{g}{\Omega \left(\frac{1}{2} r \omega + R(z) \Omega \right)} = \frac{2g}{3v^2} R(z). \quad (2.23)$$

Die Lösung ist ganz ähnlich zu Aufgabenteil a)

$$R(z) = R_{\text{unten}} e^{2gz/3v^2}. \quad (2.24)$$

- f) Die Kugel besitzt mit $J = \frac{2}{5} m r^2$ ein kleineres Trägheitsmoment als die Münze. Das wirkende Drehmoment ist daher größer als das für die Präzession des Drehimpulses um die z -Achse notwendige Drehmoment. In Summe wirkt also auf die Kugel ein Drehmoment, das sie nach unten beschleunigt. Die Kugel rollt daher die Wand hinab, während sie sich weiterhin um die z -Achse bewegt.

Lösung zu Aufgabe 3 Teilchenphysik am Large Hadron Collider (LHC)**3.1 Beschleunigerphysik**

- a) Das 2. Newtonsche Gesetz gilt auch im relativistischen Fall, wenn man mit \vec{p} den relativistischen Impuls $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ bezeichnet. Hierbei ist m_0 die Ruhemasse des betrachteten Teilchens, \vec{v} dessen Geschwindigkeit und $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Auf das Teilchen wirkt die Lorentzkraft, so dass gilt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.1)$$

Die Impulsänderung muss gleich der Zentripetalkraft $m v^2/r$ sein und da die Geschwindigkeit senkrecht zu der Flussdichte ist, ergibt sich mit (3.1)

$$\frac{m_0 \gamma v^2}{r} = q v B. \quad (3.2)$$

Daraus folgt für den Krümmungsradius

$$r = \frac{m_0 \gamma v}{q B}. \quad (3.3)$$

Die Energie des betrachteten Protons und Elektrons sind so groß, dass sie sich näherungsweise mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Mit der Beziehung $E = \gamma m_0 c^2$ ergibt sich daher aus (3.3)

$$B \approx \frac{E}{q r c} \approx 0,035 \text{ T}, \quad (3.4)$$

wobei für den numerischen Wert $r = 27 \text{ km}/2\pi = 4300 \text{ m}$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, sowie $E = 45 \text{ GeV} = 7,21 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ verwendet wurden. Das Ergebnis ist für Elektron und Proton bei großen Energien identisch.

- b) Für die Dimensionsanalyse wird folgende Abhängigkeit der abgestrahlten Leistung von den angegebenen Parametern angenommen:

$$P = q^\beta c^\delta a^\eta \varepsilon_0^\xi. \quad (3.5)$$

Hierbei sind β , δ , η und ξ zu bestimmende Exponenten.

Bezeichne mit $[X]$ die SI-Einheit der physikalischen Größe X . Dann muss

$$[P] = [q]^\beta [c]^\delta [a]^\eta [\varepsilon_0]^\xi \quad (3.6)$$

bzw. $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = (\text{A} \cdot \text{s})^\beta (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\delta (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\eta (\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3})^\xi$

gelten. Der Vergleich der linken und rechten Seiten ergibt das Gleichungssystem

$$1 = -\xi, \quad 2 = \delta + \eta - 3\xi, \quad -3 = \beta - \delta - 2\eta + 4\xi, \quad 0 = \beta + 2\xi. \quad (3.7)$$

Die Lösung zu (3.7) ist

$$\beta = 2, \quad \delta = -3, \quad \eta = 2, \quad \xi = -1. \quad (3.8)$$

Damit ergibt sich der gesuchte Ausdruck für die abgestrahlte Leistung

$$P \sim \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}. \quad (3.9)$$

Bei einer kompletten Betrachtung würde man folgendes Ergebnis erhalten (die γ Abhängigkeit wird in der Aufgabenstellung angegeben):

$$P = \frac{q^2 a^2 \gamma^4}{6 \pi \varepsilon_0 c^3}. \quad (3.10)$$

- c) Aus $E = \gamma m_0 c^2$ folgt, dass $P \sim m_0^{-4}$. Der Strahlungsverlust ist also bei leichten Teilchen viel grösser. Das Verhältnis der abgestrahlten Leistung für ein Elektron bzw. ein Proton bei dem selben Krümmungsradius und gleicher Energie, also insbesondere bei gleicher Zentripetalbeschleunigung, beträgt:

$$\frac{P_{\text{Elektron}}}{P_{\text{Proton}}} = \left(\frac{m_{\text{Proton}}}{m_{\text{Elektron}}} \right)^4 = 1836^4 \approx 1 \cdot 10^{13}. \quad (3.11)$$

Aufgrund dieses enormen Unterschiedes in der abgestrahlten Leistung ist es für einen Elektronenbeschleuniger vorteilhaft, ihn als Linearbeschleuniger zu bauen. Betrachte dazu zum Beispiel den notwendigen Umfang, den ein Ringbeschleuniger, der, wie der LEP, Elektronen und Positronen zur Kollision bringt, haben muss, um bei einer Schwerpunktsenergie von 1 TeV die gleiche Verlustleistung zu haben wie der LEP mit einer Schwerpunktsenergie von 90 GeV. Aus Gleichung (3.10) ergibt sich $P \sim E^4 r^{-2}$. Also folgt für den Umfang $U = U_{\text{LEP}} (E/E_{\text{LEP}})^2 \approx 120 \cdot U_{\text{LEP}} \approx 3000$ km. Es ist unrealistisch, so einen langen Tunnel zu bauen, insbesondere, wenn dafür bei linearer Bauweise eine Schwerpunktsenergie von 1 TeV schon mit einem gut 30 km langen Tunnel erreicht werden kann.

Alternativ könnte man z.B. auch berechnen, welchen Radius die Ringvariante eines 1 TeV Elektronen-Positronen-colliders haben müsste, um den gleichen Strahlungsverlust wie der LHC bei einer Energie von etwa 10 TeV zu haben. Auch hier ergibt sich ein unrealistisch großer Wert.

3.2 Stationäres target vs. head-on-collider

In beiden Fällen setzt sich die Bewegung der Teilchen aus einer Bewegung des Schwerpunktes und einer Teilchenbewegung relativ zum Schwerpunkt zusammen. Die Energie der Bewegung des Schwerpunktes ist bei den betrachteten Kollisionsexperimenten nicht nutzbar.

- d) Das Laborsystem stellt in diesem Fall auch das Schwerpunktsystem dar. Daher ist die zur Verfügung stehende Energie im Schwerpunktsystem gleich der zur Verfügung stehenden Energie im Laborsystem und diese ist gleich $2E_0$.
- e) Im Fall des stationären Ziels muss zuerst das Schwerpunktsystem bestimmt werden, das sich mit einer Geschwindigkeit u relativ zum Laborsystem bewegt. Bezeichne mit v die Geschwindigkeit des einfliegenden Protons relativ zum Laborsystem. Dann bewegt sich das Proton gemäß der Geschwindigkeitsaddition mit einer Geschwindigkeit

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}} \quad (3.12)$$

relativ zum Schwerpunktsystem. Das Schwerpunktsystem ist aber so definiert, dass sich in diesem beide Protonen mit derselben Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen. Es gilt also $v' = \frac{0+u}{1-0 \cdot u/c^2} = u$ und damit ergibt sich aus (3.12) für die Schwerpunktgeschwindigkeit

$$u = \frac{c^2}{v} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{c^2}{v} \left(1 \pm \frac{1}{\gamma_v} \right), \quad (3.13)$$

wobei $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ den γ -Faktor des Protons im Laborsystem bezeichnet.

Daraus lässt sich mit $\frac{c^2}{v^2} = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v^2 - 1}$ der γ -Faktor für das Schwerpunktsystem bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2} \left(1 \pm \frac{1}{\gamma_v} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v^2 - 1} \left(1 \pm \frac{1}{\gamma_v} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\gamma_v \pm 1)^2}{(\gamma_v + 1)(\gamma_v - 1)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_v \pm 1}{\gamma_v \mp 1}}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die einzig physikalisch sinnvolle Lösung ist mit $E_0 \gg m_{\text{Proton}} c^2$

$$\gamma_u = \sqrt{\frac{\gamma_v + 1}{2}} \approx \sqrt{\frac{\gamma_v}{2}}. \quad (3.15)$$

Die im Schwerpunktsystem verfügbare Energie lässt sich damit bestimmen zu

$$\begin{aligned} E_{\text{Schwerpunkt}} &= 2 \gamma_u m_{\text{Proton}} c^2 = \sqrt{2} m_{\text{Proton}} c^2 \sqrt{\gamma_v + 1} \\ &= \sqrt{2 m_{\text{Proton}} c^2} \sqrt{2 E_0 + m_{\text{Proton}} c^2} \approx 2 \sqrt{m_{\text{Proton}} c^2 E_0}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Energie des Protons im Laborsystem $2 E_0 = \gamma_v m_{\text{Proton}} c^2$ ist.

3.3 Strahlenergievariationen am LEP

- f) Dieser Aufgabenteil basiert auf *The influence of train leakage currents on the LEP dipole field*, E. Bravin et al., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, **417** (1998), in dem dieser Effekt genauer beschrieben wird.

Der Stromkreis zur Versorgung des Zuges wird, wie in Abbildung 4 dargestellt, durch die Schienen, durch die Erde und durch eine Kombination aus Erdsegmenten und eines Teils der LEP-Beschleunigeröhre geschlossen. Wir interessieren uns nur für den letzten Teil. Der Widerstand eines der Erdsegmente lässt sich grob durch die Annahme eines Quaders der Höhe $a = 80$ m (der Tiefe des LEP-Tunnels unter der Erde), einer Breite von etwa $b = 100$ m (der ungefähren Länge eines Zuges) und einer Länge von $\ell = 1$ km (dem Abstand der Schienen von dem Tunnel) annähern. Mit dem spezifischen Widerstand $\rho_{\text{Erde}} = 100 \Omega \text{ m}$ ergibt sich daraus $R_{\text{Erde}} \approx \rho_{\text{Erde}} \ell / a b \approx 10 \Omega$. Der Widerstand R_{LEP} der LEP-Vakuumröhre besteht aus zwei parallel geschalteten halbkreisförmigen Tunnelsegmenten die jeweils eine Länge von etwa 13,5 km besitzen. Der stromführende Querschnitt der Vakuumkammer lässt sich aus der Abbildung abschätzen zu $A \approx 50 \text{ cm}^2$. Damit ergibt sich für den Widerstand der Vakuumkammer

$$R_{\text{LEP}} \approx \rho_{\text{Aluminium}} \frac{13,5 \text{ km}}{2 A} \approx 0,04 \Omega. \quad (3.17)$$

Damit wird der Gesamtwiderstand der beiden Erdsegmente in Reihe mit dem Widerstand der Vakuumröhre klar durch den Widerstand der Erdsegmente bestimmt und durch die Vakuumröhre fließt ein Strom der Stärke

$$I_{\text{Leckstrom}} \approx \frac{10 \text{ V}}{20 \Omega} \approx 0,5 \text{ A}. \quad (3.18)$$

Für die Bestimmung des zusätzlichen Magnetfeldes im Inneren der Vakuumkammer kann man den Strom noch in einen Anteil durch die symmetrische Ellipse, der das Magnetfeld im Inneren der Ellipse nicht ändert und einen Anteil durch das Pumpgehäuse zerlegen, der für das zusätzliche Magnetfeld verantwortlich ist. Dies ändert aber nichts an der Größenordnung des Ergebnisses.

Nimmt man an, dass der gesamte Strom $I_{\text{Leckstrom}}$ für das zusätzliche Magnetfeld verantwortlich ist, so ergibt sich für die zusätzliche magnetische Flussdichte mit der Annahme eines stromdurchflossenen Drahtes

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I_{\text{Leckstrom}}}{2 \pi d} \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ T}, \quad (3.19)$$

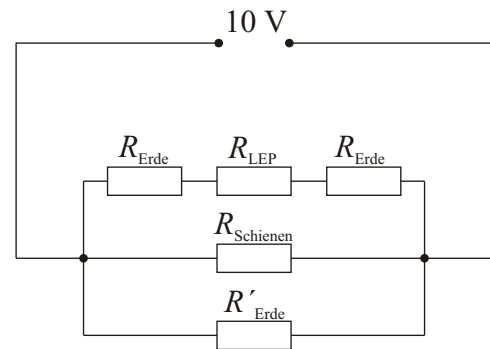


Abbildung 4: Skizze des Stromkreises für die Leckströme.

wobei $d \approx 10$ cm den Abstand des Drahtes von der Mitte der Ellipse angibt. Daraus ergibt sich mit (3.4) ein Unterschied in der Strahlenergie von

$$\Delta E = E \frac{\Delta B}{B} \approx 1 \text{ MeV}. \quad (3.20)$$

Das Ergebnis kann je nach Abschätzung zwischen 0,1 und einigen MeV liegen. Die tatsächlich beobachtete Verschiebung am LEP lag bei etwa 12 MeV. Diese Verschiebung ist zwar klein gegenüber der Strahlenergie von 45 GeV aber bei den durchgeführten Präzisionsmessungen durchaus relevant.

Lösung zu Aufgabe 4 Experimentelle Aufgabe - Brechungsindex einer Salzlösung

Die Abhängigkeit des Brechungsindex von dem Salzgehalt der Lösung ist relativ gering. Daher muss der Brechungsindex sehr genau bestimmt werden, um diesen Effekt experimentell quantitativ zu untersuchen.

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen möglichen Versuchsaufbau. Der Spiegel wird dabei schräg in eine Schüssel mit der zu untersuchenden Salzlösung gestellt. Der Laserpointer wird so über der Schüssel befestigt, dass sein Licht senkrecht auf die Oberfläche der Salzlösung trifft und an dem Spiegel reflektiert wird. Der Lichtstrahl des Laserpointers wird nach der Reflexion am Spiegel an der Oberfläche der Salzlösung gebrochen und der gebrochene Lichtstrahl lässt sich an einem Schirm auffangen. Die Brechung des Lichtstrahls ist abhängig von dem Salzgehalt der Lösung und daher verschiebt sich der Punkt, an dem der Lichtstrahl auf den Schirm trifft, mit der Veränderung des Salzgehaltes.

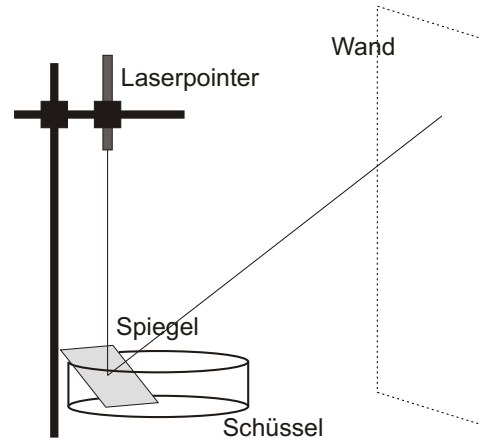


Abbildung 5: Möglicher Versuchsaufbau zur Bestimmung des Brechungsindex.

Theoretische Betrachtung

In der nebenstehenden Skizze ist der Strahlenverlauf genauer aufgeführt. Ohne Salzlösung in der Schüssel trifft der reflektierte Lichtstrahl den Schirm in einer Höhe h_0 . Füllt man nun Flüssigkeit bis zu einer Höhe d in die Schüssel, so wird der Lichtstrahl gebrochen und trifft in einer Höhe h auf den Schirm, wobei h von der Salzkonzentration c abhängig ist.

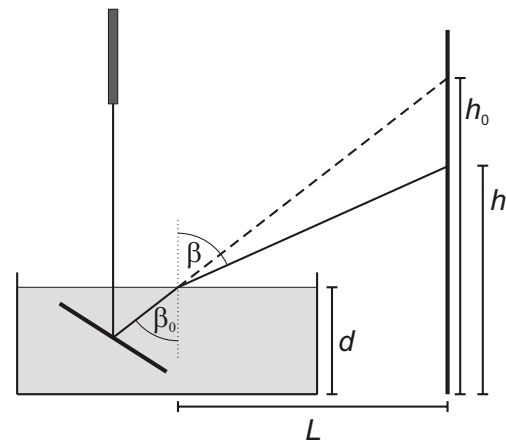


Abbildung 6: Skizze des Strahlenverlaufs zur Bestimmung des Brechungsindex.

Das Snellius'sche Brechungsgesetz liefert in diesem Fall für den Brechungsindex $n(c)$ in Abhängigkeit von der Salzkonzentration

$$\begin{aligned} n(c) \sin \beta_0 &= n(c) \frac{L}{\sqrt{L^2 + (h_0 - d)^2}} \\ &= \sin \beta(c) \\ &= \frac{L}{\sqrt{L^2 + (h(c) - d)^2}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

und damit

$$n(c) = \sqrt{\frac{L^2 + (h_0 - d)^2}{L^2 + (h(c) - d)^2}}. \quad (4.2)$$

Zu beachten ist dabei der senkrechte Einfall des Laserstrahls auf die Flüssigkeitsoberfläche, da das Licht in diesem Fall ohne Brechung durch die Flüssigkeitsoberfläche geht und sich der Winkel β_0 aus der Betrachtung der Situation ohne Flüssigkeit bestimmen lässt.

Versuchsdurchführung

Für die Versuchsdurchführung wurde als Schirm eine weiße Wand verwendet und für die Salzlösung eine Schüssel benutzt. Als Lichtquelle wurde ein handelsüblicher Laserpointer verwendet, der

Licht mit einer Frequenz im roten Spektralbereich emittiert. Der Laserpointer wurde in einem Stativ befestigt und der senkrechte Strahlengang des Laserstrahls wurde mit Hilfe eines Spiegels auf dem horizontalen Rand der Schüssel eingestellt, indem der Laserpointer so justiert wurde, dass der reflektierte Strahl mit dem einfallenden Strahl übereinstimmte. Der Spiegel wurde dann mit etwas Knetmasse in der Schüssel wie in Abbildung 5 befestigt.

Bei der Durchführung wurde lauwarmes Leitungswasser verwendet, um das Salz besser lösen zu können. Beginnend mit reinem Leitungswasser wurde zu einem Wasservolumen V_{Wasser} nach und nach mehr Salz hinzugegeben und jeweils vor der Messwertaufnahme die Lösung verrührt, bis das Salz gelöst war. Auf diese Weise blieb die Füllhöhe der Lösung während des Versuches im Rahmen der Messungenauigkeit konstant. Die Masse m_{Salz} des zugegebenen Salzes wurde mit einer Küchenwaage bestimmt und die Konzentration der Salzlösung nach $c = m_{\text{Salz}}/V_{\text{Wasser}}$ berechnet.

Folgende Werte wurden gemessen:

Abstand zwischen Brechpunkt an der Oberfläche und der Wand	$L = 1,604 \text{ m} \pm 0,1 \text{ cm}$
Höhe des Lichtpunktes an der Wand ohne Wasser	$h_0 = 2,201 \text{ m} \pm 0,3 \text{ cm}$
Wasservolumen	$V_{\text{Wasser}} = (500 \pm 2) \text{ mL}$
Füllhöhe der Lösung in der Flüssigkeit über dem Boden	$d = (4,7 \pm 0,05) \text{ cm}$

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Salzkonzentration.

Nr.	$m_{\text{Salz}} / \text{g}$	$c / \text{g L}^{-1}$	h / m	n	$\Delta c / \text{g L}^{-1}$	Δn
1	0	0	1,274	1,330	0,0	0,0028
2	10	20	1,268	1,332	1,1	0,0027
3	20	40	1,260	1,335	2,2	0,0027
4	30	60	1,252	1,339	3,2	0,0027
5	40	80	1,245	1,341	4,3	0,0027
6	50	100	1,237	1,345	5,4	0,0027
7	60	120	1,231	1,347	6,5	0,0027
8	70	140	1,225	1,349	7,6	0,0027
9	80	160	1,217	1,353	8,6	0,0028
10	90	180	1,211	1,355	9,7	0,0028
11	100	200	1,205	1,358	10,8	0,0029
12	110	220	1,200	1,360	11,9	0,0029
13	120	240	1,193	1,362	13,0	0,0029
14	130	260	1,188	1,364	14,0	0,0030
15	140	280	1,184	1,366	15,1	0,0030
16	150	300	1,178	1,368	16,2	0,0030
17	160	320	1,173	1,370	17,3	0,0031
18	(170)	(340)	(1,172)	(1,371)	?	(0,0031)

Die letzten beiden Spalten geben die Fehler in der Salzkonzentration und im Brechungsindex gemäß der Fehlerdiskussion im folgenden Abschnitt an.

Bei einer Salzzugabe von 170 g ließ sich das Salz trotz längerem Rühren nicht mehr ganz auflösen. Dieser Wert liegt tatsächlich schon sehr nah an der Sättigung der Lösung, die bei etwa $350\text{--}360 \text{ g L}^{-1}$ eintreten sollte. Der letzte Messwert wird daher für die Auswertung außer acht gelassen.

Auswertung und Fehlerdiskussion

Zur Bestimmung des Brechungsindex von Leitungswasser kann man die Abhängigkeit des Brechungsindex vom Salzgehalt graphisch darstellen.

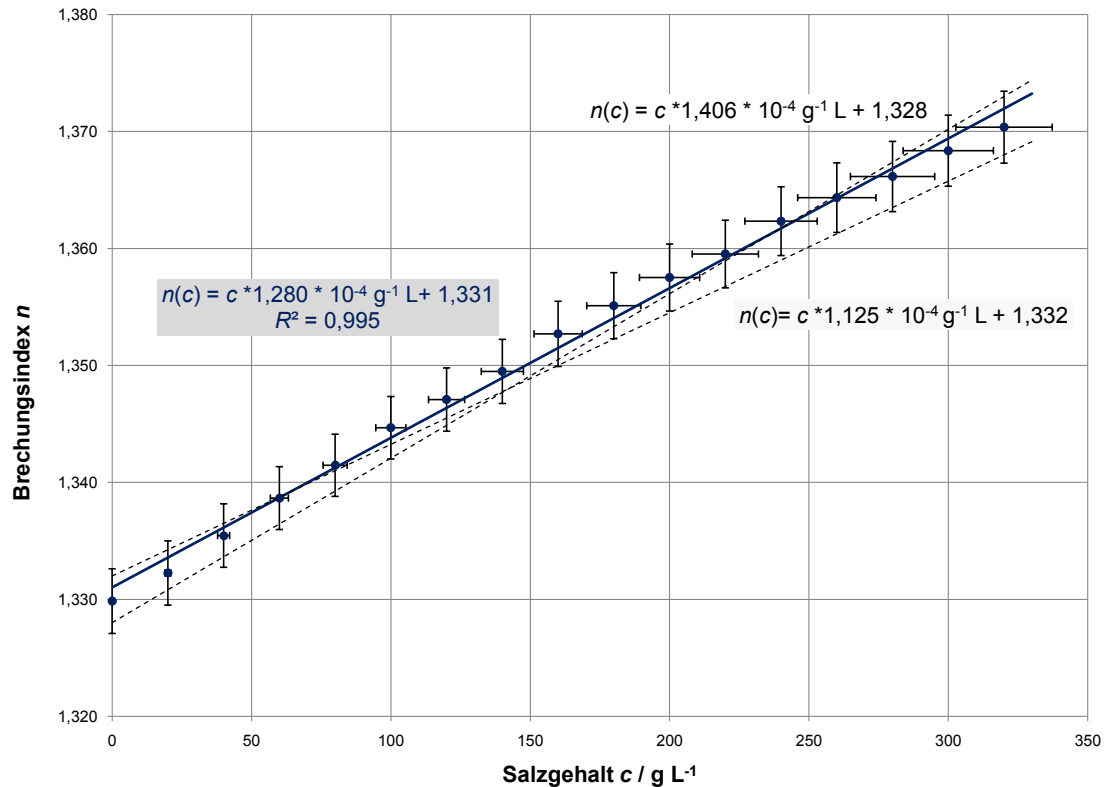


Abbildung 7: Graph für die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Salzkonzentration mit Ausgleichsgeraden.

Der Verlauf der Messwerte wird sehr gut durch eine Gerade beschrieben und es ergibt sich aus dem Graphen für die Ausgleichsgerade der Zusammenhang

$$n(c) = 1,331 + c \cdot 1,280 \cdot 10^{-4} \text{ L g}^{-1}. \quad (4.3)$$

Die Fehler in den Parametern lassen sich aus den Fehlern in den Einzelmessungen ableiten. Neben den oben angegebenen Fehlern beträgt der Fehler für die Messung der Höhe h insbesondere durch die Ausdehnung des Lichtpunktes an der Wand etwa 3 mm. Das Salz wird in Schritten von jeweils 10 g hinzugefügt. Bei jedem Wiegevorgang beträgt der Fehler etwa 0,5 g, da die Waage die Masse nur auf volle Gramm anzeigt. Daher liegt der Fehler in der Massenbestimmung insgesamt bei etwa 5% der zugegebenen Salzmasse.

Aus der Fehlerfortpflanzung ergibt sich für die Fehler Δc und Δn in der Konzentration sowie dem Brechungsindex:

$$\begin{aligned} \Delta c &= \left| \frac{\partial c}{\partial m_{\text{Salz}}} \right| \Delta m_{\text{Salz}} + \left| \frac{\partial c}{\partial V_{\text{Wasser}}} \right| \Delta V_{\text{Wasser}} = c \left(\frac{\Delta m_{\text{Salz}}}{m_{\text{Salz}}} + \frac{\Delta V_{\text{Wasser}}}{V_{\text{Wasser}}} \right), \\ \Delta n &= \left| \frac{\partial n}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial n}{\partial h_0} \right| \Delta h_0 + \left| \frac{\partial n}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial n}{\partial h} \right| \Delta h \\ &= n \left(L \left\{ \frac{1}{L^2 + (h_0 - d)^2} - \frac{1}{L^2 + (h - d)^2} \right\} \Delta L + \frac{h_0 - d}{L^2 + (h_0 - d)^2} \Delta h_0 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{h - d}{L^2 + (h - d)^2} - \frac{h_0 - d}{L^2 + (h_0 - d)^2} \right\} \Delta d + \frac{h - d}{L^2 + (h - d)^2} \Delta h \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die letzten beiden Spalten in Tabelle 1 geben die nach diesen Formeln bestimmten Fehler an. Die in den Graphen eingetragenen Fehlerbalken erlauben das Eintragen weiterer mit den Messwerten verträglichen Ausgleichsgeraden, mit deren Hilfe sich die aus den Ablese- und Messgerätegenauigkeiten resultierenden Fehlergrenzen für die gesuchten Größen ergeben (Siehe hierzu auch Abbildung 7).

Die Gleichung für die Ausgleichsgerade lässt sich schließlich mit Fehlern angeben als:

$$n(c) = (1,331 \pm 0,003) + c \cdot (1,280 \pm 0,155) \cdot 10^{-4} \text{ L g}^{-1}. \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich für den gesuchten Brechungsindex von Leitungswasser

$$n_{\text{Leitungswasser}} = 1,331 \pm 0,003. \quad (4.6)$$

Dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit dem Literaturwert von reinem Wasser für rotes Licht, der bei etwa 1,331 liegt (vgl. z.B. Bergmann Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3 - Optik*, 10. Auflage (2004)), überein.

Unberücksichtigt sind in dieser Diskussion systematische Fehler geblieben. Hierzu zählen zum einen Ungenauigkeiten bei der senkrechten Justierung des Lasers und das nicht vollständige Lösen des Salzes im Wasser. Letztere Fehlerquelle könnte für das leichte Abknicken der Kurve im oberen Bereich verantwortlich sein.

Bewertungsvorschläge

Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade sollte nur die Richtigkeit der Lösung bewertet werden, nicht die Sauberkeit der Ausarbeitung und der sprachliche Ausdruck. Wie auf dem Aufgabenblatt vermerkt, sind computergenerierte Lösungen nicht zulässig.

Achten Sie bitte auch darauf, dass den Lösungen das vollständig ausgefüllte Formblatt mit den persönlichen Daten und der Erklärung beiliegt!

Aufgabe 1 Luftballon		Punkte
a)	Zusammensetzung des Drucks im Ballon (1.1)	0,5
	Idee zur Bestimmung der Konstanten (1.2)	0,5
	Analytischer Ausdruck für Druck in (1.3)	0,5
	Numerischer Ausdruck für Druck in (1.3)	0,5
b)	Näherung von Luft als ideales Gas	1
	Anwendung der Gasgleichung und Vergleich (1.4)	1
	Analytisches Ergebnis für Eintauchtiefe (1.5)	0,5
	Numerisches Ergebnis für Eintauchtiefe (1.5)	0,5
c)	Annahme eines adiabatischen Prozesses und (1.6)	1
	Anwendung der Adiabatengleichung und Vergleich (1.7)	1
	Analytisches Ergebnis für Eintauchtiefe (1.8)	0,5
	Numerisches Ergebnis für Eintauchtiefe (1.8)	0,5
	Ansatz mit Gasgleichung (1.9) zur Bestimmung der Temperatur	0,5
	Analytisches Ergebnis für Temperatur (1.10)	0,5
	Numerisches Ergebnis für Temperatur (1.10)	0,5
d)	Idee und Angabe von Näherungen bzw. Annahmen	1
	Auftriebskraft (1.11)	0,5
	Tiefe in Abhängigkeit von dem Radius in (1.12)	1
	Rechnung und analytisches Ergebnis (1.15) für wärmeleitfähige Hülle	1
	Numerisches Ergebnisse in (1.15)	0,5
	Rechnung und analytisches Ergebnis (1.16) für wärmeisolierende Hülle	1
	Numerisches Ergebnisse in (1.16)	0,5
		15

Aufgabe 2 Kugel und Münze im Trichter		Punkte
<i>Aufgabe 2.1 Punktförmige Masse im Trichter</i>		
a)	Angabe der Kräfte und Idee des Kräftegleichgewichtes	1
	Herleitung der Differentialgleichung (2.3)	1
	Ergebnis (2.4) als Lösung der Differentialgleichung	1
	Analytisches Ergebnis (2.5) für Trichterhöhe	0,5
	Numerisches Ergebnis (2.5) für Trichterhöhe	0,5
b)	Ansatz über Kräftegleichgewicht	0,5
	Beweis, dass die z -Komponente konstant bleibt	0,5
	Formulierung des Energiesatzes und (2.7)	1
	Erkennen der Drehimpulserhaltung in z -Richtung und (2.8)	1
	Erkennen und Beweis der Konstanz der zu v senkrechten Geschwindigkeitskomponente	1,5
	Qualitative Beschreibung der Bewegung der Masse	1
	Idee zur Abschätzung der Zeit bis zum Verlassen des Trichters	1
	Sinnvoller Wert wie in (2.10) für Zeit	0,5
c)	Ansatz über Kräftegleichgewicht und (2.11)	1
	Ergebnis (2.12) für Höhe	1
	Ausdruck (2.13) für minimale Geschwindigkeit	1
d)	Qualitative Beschreibung der Bewegung	1
	Zusammenhang (2.15) zwischen Höhenänderung und Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu v	1
	Formel (2.16) für Höhenänderung	0,5
	Betrachtung von $\dot{z} = 0$ und Bedingung (2.18)	2
	Bestimmung eines analytischen Ausdruckes für den Maximalwert der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu v (2.19)	2
	Numerisches Ergebnis in (2.19)	0,5
<i>Aufgabe 2.2 Münze im Trichter</i>		
e)	Idee der Drehmomentbetrachtung	1
	Drehimpuls (2.20) der Münze	0,5
	Zusammenhang (2.21) zwischen Drehmoment und Drehimpuls der Münze	1
	Kräftegleichgewicht (2.22)	1,5
	Differentialgleichung (2.23) für $R(z)$	1
	Lösung (2.24) für $R(z)$	1
f)	Erkennen, dass das Trägheitsmoment der Kugel kleiner ist	1
	Erkennen eines resultierenden Drehmomentes auf Kugel	1
	Beschreibung der Bewegung der Kugel im Trichter	1
		30

Aufgabe 3 Teilchenphysik am Large Hadron Collider (LHC)		Punkte
<i>Aufgabe 3.1 Beschleunigerphysik</i>		
a)	Ansatz über Newtonsches Gesetz mit relativistischem Impuls	1
	Kräftegleichgewicht (3.2)	1
	Ergebnis (3.3) für Krümmungsradius	0,5
	Analytischer Ausdruck in (3.4) für das Magnetfeld	0,5
	Numerischer Ausdruck in (3.4) für das Magnetfeld	0,5
b)	Potenzansatz wie in (3.5) für Dimensionsanalyse	1
	Überführung in Gleichung (3.6) für Einheiten	1
	Lösung der Gleichung durch Dimensionsvergleich	1
	Ergebnis (3.9) für die Leistung	0,5
c)	Erkennen der Proportionalität von P und m_0^{-4}	1
	Analytisches Ergebnis für Leistungsverhältnis (3.11)	0,5
	Numerisches Ergebnis für Leistungsverhältnis (3.11)	0,5
	Anführen dieses Verhältnisses als Vorteil eines Linearbeschleunigers	0,5
	Beispielrechnung zum Vergleich der beiden Bauweisen	1,5
<i>Aufgabe 3.2 Stationäres target vs. head-on-collider</i>		
d)	Erkennen, dass Laborsystem und Schwerpunktsystem identisch sind	1
	Ergebnis für Energie im Schwerpunktsystem	1
e)	Idee der Transformation der Geschwindigkeit in das Schwerpunktsystem	0,5
	Geschwindigkeitsaddition und Ergebnis (3.12)	1
	Erkennen, dass im Schwerpunktsystem beide Protonen die gleiche Geschwindigkeit haben und (3.13)	1,5
	Bestimmung des γ -Faktors im Schwerpunktsystem (3.15)	1
	Ergebnis (3.16) für die Energie im Schwerpunktsystem	1
<i>Aufgabe 3.3 Strahlenergievariationen am LEP</i>		
f)	Sinnvolle Idee zur Modellierung des Sachverhaltes	2
	Konstruktion eines Stromkreises wie in Abb. 4	1
	Sinnvolle Abschätzung für Erdwiderstand	1
	Sinnvolle Abschätzung für Vakuumröhrenwiderstand	1
	Bestimmung des Leckstromes aus der Abschätzung	0,5
	Angabe der resultierenden Magnetfeldänderung	0,5
	Ergebnis (3.20) für den Unterschied bei der Strahlenergie	1
		25

Beachten Sie bitte, dass in dieser Aufgabe die Punkte von Aufgabe b) und c), verglichen mit der Aufgabenstellung, getauscht worden sind.

Aufgabe 4 Brechungsindex einer Salzlösung		Punkte
a)	Idee für einen geeigneten Versuch zur genauen Bestimmung des Brechungsindex und Beschreibung des Aufbaus	6
	Theoretische Betrachtung zu dem beschriebenen Versuch und Herleitung einer Abhängigkeit des Brechungsindex von den Messgrößen	4
	Aufnahme einer ausreichenden Anzahl von Messwerten	6
	Auswertung der Messwerte und graphische Darstellung	4
b)	Linearisierung des Zusammenhanges zwischen Salzkonzentration und Brechungsindex sowie Angabe der Parameter	4
	Realistischer Wert für den Brechungsindex von Leitungswasser bei entsprechender Lichtwellenlänge	2
	Abschätzung der Fehler in den einzelnen Messgrößen	2
	Angabe der Fehler für den Brechungsindex und die anderen in der Linearisierung auftretenden Parameter	2
		30

Summe der Punkte 100

Die angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen muss die Bewertung sinngemäß abgeändert werden, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe beizubehalten ist. Folgefehler sollten nicht bestraft werden. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet werden sollte, wenn der Schüler vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet hat. Wenn bei einem Ergebnis die erforderliche Angabe einer Einheit fehlt, sollte dies zu Punktabzug führen.

Bitte geben Sie bei der Bewertung nicht nur die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe an, sondern auch die Aufschlüsselung nach Teilleistungen gemäß der Bepunktungsvorlage auf der Rückseite des Formblattes für die persönlichen Daten.